Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist.

(Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn.)

Hamilton hat in seiner Abhandlung *on a general method in dynamics* *) bemerkt, dass die Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems von freien Massenpunkten, bei dem die bewegenden Kräfte auf eine Kräftefunction zurückgeführt werden können, aus der Forderung hervorgehen, dass die erste Variation eines von ihm bezeichneten Integrals gleich Null werde. Das Element dieses Integrals ist gleich dem Aggregate aus der halben Summe der lebendigen Kräfte des Systems und aus der Kräftefunction, multiplicirt in das Zeitelement; die Integration erstreckt sich von einem beliebigen festen Anfangswerthe bis zu einem beliebigen festen Endwerthe der Zeit; bei der Variation werden die Coordinaten der Massenpunkte in der betreffenden Anfangslage und Endlage als unveränderlich betrachtet. Wie man leicht erkennt, bleibt diese Darstellung des mechanischen Problems auch dann noch gültig, wenn zwischen den Coordinaten der einzelnen Massenpunkte Bedingungsgleichungen vorhanden sind, welche die Zeit nicht enthalten. Alsdann hat man die Coordinaten der Massenpunkte durch eine angemessene Zahl von unabhängigen Variabelen auszudrücken, und die halbe Summe der lebendigen Kräfte des Systems in eine quadratische Form von den nach der Zeit genommenen Differentialquotienten der unabhängigen Variabelen zu verwandeln.

Da das Mass für die lebendige Kraft eines einzelnen Massenpunktes erhalten wird, indem man die Masse desselben mit dem Quadrate des Linearelements seiner Bahn multiplicirt und durch das Quadrat des Zeitelements dividirt, so hängt die Bestimmung des Masses von dem Ausdrucke des Linearelements im Raume ab. Die neueren Speculationen über die Natur des Raumes haben gezeigt, dass es nicht nothwendig ist, das Element einer von einem Punkte ausgehenden Linie im Raume als darstellbar durch die Quadratwurzel aus dem Aggregat der Quadrate von den Differentialen geeigneter Coordinaten

---

*) Philosophical transactions of the royal society of London, 1834, part II, pag. 247; 1835, part I, pag. 95.

des betreffenden Punktes anzunehmen. Wenn man von gewissen Bedingungen, die in dem wirklichen Raume thatsächlich erfüllt sind, abstrahirt, so ist es gestattet, das Linearelement gleich der Quadratwurzel aus einer beliebigen wesentlich positiven quadratischen Form, oder allgemeiner gleich der p^{ten} Wurzel aus einer beliebigen wesentlich positiven Form des p^{ten} Grades von den Differentialen beliebiger Coordinaten des betreffenden Punktes vorauszusetzen. Dieser allgemeineren Hypothese in Bezug auf die Natur des Raumes lassen sich die Begriffe der Mechanik anpassen *). Man kann feststellen, dass die lebendige Kraft eines Massenpunktes gemessen werde, indem die Masse des Punktes mit der p^{ten} Potenz des betreffenden Linearelements multiplicirt und durch die p^{te} Potenz des Zeitelements dividirt wird, und dem *Hamilton*schen Variationsproblem ein allgemeineres Variationsproblem substituiren, bei welchem das Aggregat aus dem p^{ten} Theile der Summe der so eben bestimmten lebendigen Kräfte des Massensystems und aus einer Kräftefunction, unter dem Integralzeichen erscheint.

Eine einfache Ueberlegung lehrt, dass, sobald zwischen den Coordinaten keine Bedingungsgleichungen existiren und die Kräftefunction gleich Null ist, die Integration des bezeichneten Variationsproblemes jedem Massenpunkte das Fortschreiten auf einer Linie vorschreibt, die für das gewählte Linearelement eine kürzeste Linie ist. Hiermit ist aber die erste Fundamentaleigenschaft der Bewegung eines Systems von Massenpunkten ausgesprochen, das an keine Bedingungsgleichungen gebunden ist und von keinen beschleunigenden Kräften getrieben wird. Wofern Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten der Massenpunkte gegeben sind, die nicht von der Zeit abhängen, so wird man bei dem bezeichneten Variationsproblem ebenfalls independente Variabele einführen, und es geht der p^{te} Theil der Summe der lebendigen Kräfte in eine wesentlich positive Form des p^{ten} Grades von den auf die Zeit bezogenen Differentialquotienten der Variabelen über. Ein Integral der be-

*) Eine gleiche Richtung verfolgt die Untersuchung von Herrn *Schering: Die Schwerkraft im Gaussischen Raume,* Nachrichten d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1870, Juli. Der Ausdruck, welcher daselbst pag. 318 als Repräsentant des Potentials bezeichnet wird, ergiebt sich aus der Formel für die Grösse w in dem Aufsatze: *Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen,* dieses Journ. Bd. 72, pag. 56, sobald die Zahl $n=3$, $\sqrt{\alpha}=\varepsilon$, $\sqrt{2f_0(u)}=(m,\mu)$ genommen, und der Factor $-m\mu$ hinzugefügt wird. Schon früher hat *Dirichlet* dieses Gebiet betreten. Derselbe sagte mir vor ungefähr zwanzig Jahren, er habe untersucht, wie sich die Theorie der Anziehung nach dem *Newton*schen Gesetze gestaltet, wenn dabei die *Gauss*ische Theorie des imaginären Raumes zu Grunde gelegt wird, theilte mir aber keine Einzelheiten mit.

treffenden isoperimetrischen Differentialgleichungen, das dem Integral der lebendigen Kraft entspricht, hat zur Folge, dass, wenn die Kräftefunction gleich Null ist, die in Rede stehende Form des p^{ten} Grades für jeden Werth der Zeit einen constanten Werth haben muss. Sind daher für ein Anfangssystem der Variabelen die sämmtlichen Anfangswerthe der Differentialquotienten gleich Null gegeben, so hat die Form beständig den Werth Null. Wegen des wesentlich positiven Charakters der Form sind dann auch die Differentialquotienten der Variabelen beständig gleich Null, und die Werthe der Variabelen bleiben dauernd gleich denjenigen Werthen, die für das Anfangssystem gegeben sind. Hierin liegt aber die zweite Fundamentaleigenschaft der Bewegung eines Systems von Massenpnkten, für das Bedingungsgleichungen existiren, und die Kräftefunction den Werth Null hat. Die vorliegende Arbeit bezieht sich auf das allgemeine Variationsproblem desjenigen Integrals, dessen Element gleich ist dem Aggregrate aus einer beliebigen Form des p^{ten} Grades von den nach der Zeit genommenen Differentialquotienten der Variabelen und einer beliebigen nur von den Variabelen abhängenden Kräftefunction, in das Zeitelement multiplicirt.

Das Variationsproblem der bezeichneten Art, bei dem die Kräftefunction verschwindet, hängt innig zusammen mit den charakteristischen Eigenschaften der Form von Differentialen, welche entsteht, sobald man in der betreffenden Form des p^{ten} Grades die Differentialquotienten der Variabelen durch die bezüglichen Differentiale ersetzt. Nun erhebt sich die Frage, ob auch das allgemeine Variationsproblem, bei dem eine beliebige Kräftefunction auftritt, mit den charakteristischen Eigenschaften einer bestimmten Form oder ganzen homogenen Function von Differentialen in einer analogen Beziehung stehe.

Für das Variationsproblem, welches die wirkliche Bewegung eines Systems von Massenpunkten darstellt, bei dem also die Zahl p den Werth zwei hat, ergiebt sich die Bestimmung einer Form, von der dies gilt, folgengendermassen. Wenn man die Summe der lebendigen Kräfte des Systems mit dem doppelten Aggregat aus der Kräftefunction und einer willkürlichen Constante multiplicirt, die aus diesem Product gezogene Quadratwurzel mit dem Elemente der Zeit multiplicirt und nach demselben integrirt, so entsteht *das Integral der kleinsten Wirkung*. Das Element dieses Integrals, aus dem sich das Zeitelement fortheben lässt, kann als die Quadratwurzel aus einer quadratischen Form von den Differentialen der Variabelen aufgefasst werden, und diese neue quadratische Form ist eine solche, mit der das in Rede stehende Variationsproblem in dem angedeuteten Sinne correspondirt.

Das Verschwinden der ersten Variation des Integrals der kleinsten Wirkung für unveränderliche Werthe der Anfangs- und der Endcoordinaten determinirt bekanntlich die Art und Weise, wie die eingeführten unabhängigen Variabelen bei der Bewegung des Massensystems von einer beliebig unter ihnen gewählten Variabele abhängen, und die Hinzufügung des Integrales der lebendigen Kraft giebt an, wie diese letzte Variabele sich mit der Zeit ändert.

Das Integral der kleinsten Wirkung verwandelt sich durch eine angemessene Substitution in die Function, welche *Hamilton* als *die charakteristische Function des mechanischen Problems* an die Spitze seiner Forschungen gestellt hat. Die eine der beiden partiellen Differentialgleichungen, die *Hamilton* für die charakteristische Function bildet, ist der Ausgangspunkt für die eingehenden und umfassenden Untersuchungen geworden, welche *Jacobi* den mechanischen und anderen mit denselben verwandten Problemen gewidmet hat. Dieselbe partielle Differentialgleichung erscheint als eine Transformationsrelation, wenn es sich darum handelt, die bezeichnete neue quadratische Form von den Differentialen der Variabelen des mechanischen Problems in eine andere Form zu transformiren, die durch einen Complex von Merkmalen ausgezeichnet ist.

Einen Leitfaden für die Betrachtung bietet hier die Untersuchung über die kürzesten Linien auf einer gegebenen Oberfläche, die *Gauss* in den *disquisitiones generales circa superficies curvas* niedergelegt hat. Zu den dortigen Ergebnissen gehört der Satz, dass, wenn man senkrecht gegen eine in der gegebenen Oberfläche beliebig gezeichnete Contour und nach derselben Seite dieser Contour lauter kürzeste Linien von gleicher Länge construirt, die Endpunkte eine neue Contour bilden, auf der die kürzesten Linien ebenfalls senkrecht stehen. Verschiedene Werthe der festen Länge ergeben verschiedene Contouren der Endpunkte; das Gesetz dieser Contouren wird aber dargestellt, indem ein gewisses Integral der correspondirenden *Hamilton*schen partiellen Differentialgleichung angemessene constante Werthe erhält.

Von Herrn *Beltrami* ist diese Anschauung auf einen Raum von n Dimensionen ausgedehnt, für den das Quadrat des Linearelements eine beliebige quadratische Form von den Differentialen der Coordinaten eines Punktes ist (*sulla teorica generale dei parametri differenziali,* memoria letta nella sessione 25. Febbrajo 1869 dell' accademia delle scienze dell' istituto di Bologna). Diese Anschauung lässt sich auf die Probleme der Mechanik übertragen, indem man eine gewisse Gruppirung der Anfangszustände des bewegten Massensystems einführt. Es werden nur solche Auflösungen des mechanischen

Problems zusammengenommen, für welche die Constante, die bei dem Integral der lebendigen Kraft zu der Kräftefunction hinzukommt, denselben Werth hat. An die Stelle einer kürzesten Linie auf der gegebenen Oberfläche tritt eine Auflösung des mechanischen Problems, an die Stelle der Contour der Anfangspunkte eine Gleichung für die Anfangswerthe der Variabelen, an die Stelle der Forderung einer senkrechten Richtung der kürzesten Linien gegen die Contour der Anfangspunkte eine Bestimmung für die Anfangselemente der Variabelen, an die Stelle der festen Länge der kürzesten Linien ein fester Werth des Integrals der kleinsten Wirkung. Dann findet sich für die mechanischen Probleme ein Resultat, das dem angeführten *Gauss*ischen Satze genau entspricht.

Dem allgemeinen Variationsproblem, bei dem das Aggregat aus einer Form des p^{ten} Grades von den Differentialquotienten der Variabelen und einer reinen Function der Variabelen auftritt, ist die Variation eines zweiten Integrals zugeordnet, das als eine Ausdehnung des Integrals der kleinsten Wirkung gelten kann. Das Element dieses zweiten Integrals ist die p^{te} Wurzel aus einer neuen Form des p^{ten} Grades von den Differentialen der Variabelen. Diese neue Form correspondirt in dem angegebenen Sinne mit dem zuerst aufgestellten allgemeinen Variationsproblem und erledigt somit die vorhin aufgeworfene Frage. Auch die übrigen für das Problem der Mechanik gefundenen Ergebnisse bleiben bei dem betreffenden allgemeinen Variationsproblem bestehen und haben insofern die Eigenschaft, von den thatsächlich geltenden Voraussetzungen über das Mass des Linearelements und der lebendigen Kraft unabhängig zu sein.

1.

Es erstrecke sich der Zeiger $\mathfrak{a}$, und in der Folge auch der Zeiger $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... über die Reihe der Zahlen von 1 bis n, und es bezeichne $x_\mathfrak{a}$ ein System von unveränderlichen Grössen, t eine independente Variabele, von der die $x_\mathfrak{a}$ abhängig gedacht werden, ϑ eine Function der Grössen $x_\mathfrak{a}$ und der ersten Differentialquotienten $\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt} = x'_\mathfrak{a}$, welche die Variabele t explicite nicht enthält. Dann beginnt die Untersuchung mit der Aufgabe, die Grössen $x_\mathfrak{a}$ in der Weise als Functionen der Variabele t zu bestimmen, dass die erste Variation des zwischen festen Grenzen genommenen Integrals

$$(1.)\qquad \Theta = \int_{t_0}^{t} \vartheta\, dt$$

für unveränderliche Anfangswerthe und Endwerthe der Variabelen $x_\mathfrak{a}$ gleich

Null wird. Die Darstellung der ersten Variation der Function ϑ

$$(2.)\qquad \delta\vartheta = \sum_a \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x_a} - \frac{d\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}}{dt}\right)\delta x_a + \frac{d\sum\limits_a \dfrac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}\delta x_a}{dt}$$

giebt das System von isoperimetrischen Differentialgleichungen

$$(3.)\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial x_a} - \frac{d\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}}{dt} = 0.$$

Wenn man in (2.) das Zeichen δ durch das Zeichen d der Differentiation nach t ersetzt, so entsteht die Gleichung

$$(2^*.)\qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \sum_a \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x_a} - \frac{d\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}}{dt}\right)x'_a + \frac{d\sum\limits_a \dfrac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}x'_a}{dt}.$$

Aus dieser Gleichung folgen zwei verschiedene Schlüsse, je nachdem der Ausdruck

$$(4.)\qquad \sum_a \frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}x'_a - \vartheta$$

gleich Null oder von Null verschieden ist. Der erstere Fall tritt dann und nur dann ein, wenn ϑ eine homogene Function des ersten Grades von den Grössen x'_a, mithin $\vartheta\,dt$ eine eben solche Function von den Grössen dx_a ist. Dann lehrt die Gleichung (2*.), dass unter den n Gleichungen (3.) *eine* die Folge der $(n-1)$ übrigen ist, und die zu bestimmende Abhängigkeit der Grössen x_a von der Variabele t besteht lediglich in der Abhängigkeit dieser Grössen von einander. In dem anderen Falle liefert die Gleichung (2*.) das Integral des Systems (3.)

$$(5.)\qquad \sum_a \frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}x'_a - \vartheta = H,$$

wo H eine willkürliche Constante bezeichnet. In beiden Fällen denkt man sich die vollständige Integration des Systems (3.) so ausgeführt, dass die Grössen x_a und x'_a für $t = t_0$ beziehungsweise den vorgeschriebenen Constanten $x_a(0)$ und $x'_a(0)$ gleich werden. In dem Falle, dass der Ausdruck (4.) gleich Null ist, betrachtet man die $(n-1)$ Grössen x_ι als von der übrig bleibenden Grösse x_{ι_1} abhängig, und hat als wesentliche Integrationsconstanten die zu dem Werthe $x_{\iota_1} = x_{\iota_1}(0)$ gehörigen $(n-1)$ Werthe $x_\iota(0)$ und $(n-1)$ Verhältnisse $\frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}$. Die Charakteristik δ, mit der Einschliessung in eine

Klammer verbunden, bedeute eine Variation, bei der $x_a(0)$ und $x'_a(0)$ geändert werden, t fest bleibt; die Charakteristik δ ohne Klammer eine Variation, bei der auch t geändert wird; die Hinzufügung der Null bei einer Function die Substitution $x_a = x_a(0)$, $x'_a = x'_a(0)$. Alsdann giebt die Gleichung (2.) das Resultat

$$(6.) \qquad (\delta\Theta) = \sum_a \frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}(\delta x_a) - \sum_a \frac{\partial\vartheta(0)}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0)$$

und, weil

$$\delta\Theta = (\delta\Theta) + \vartheta\, dt, \qquad \delta x_a = (\delta x_a) + x'_a(0)\,\delta t$$

ist, das nächste Resultat

$$(7.) \quad \delta\Theta = \Big(\vartheta - \sum_a \frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}x'_a\Big)\delta t + \sum_a \frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}\delta x_a - \sum_a \frac{\partial\vartheta(0)}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0).$$

Sobald nun der Ausdruck (4.) gleich Null ist, so kommt

$$(7^*.) \qquad \delta\Theta = \sum_a \frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}\delta x_a - \sum_a \frac{\partial\vartheta(0)}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0),$$

und die Grösse Θ ist gleich einer reinen Function der Werthsysteme x_a und $x_a(0)$. Damit die Grösse Θ eine eindeutige Function derselben sei, müssen die Integrationswerthe x_a von den Anfangswerthen $x_a(0)$ beziehungsweise nur um so viel abweichen, dass die $(n-1)$ Verhältnisse $\frac{x'_\mathfrak{c}(0)}{x'_{\mathfrak{c}_1}(0)}$ durch die Grössen x_a eindeutig ausgedrückt werden können. Wenn dagegen der Ausdruck (4.) nicht gleich Null ist, so gilt das Integral (5.), und die Anwendung desselben auf (7*.) liefert die Gleichung

$$(7^{**}.) \qquad \delta\Theta = -H\delta t + \sum_a \frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}\delta x_a - \sum_a \frac{\partial\vartheta(0)}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0).$$

Damit die Grösse Θ hier eine eindeutige Function der Grössen t, x_a, $x_a(0)$ sei, müssen die Integrationswerthe x_a von den Anfangswerthen $x_a(0)$ nur um soviel entfernt sein, dass die n Grössen $x'_a(0)$ durch die n Grössen x_a und durch t eindeutig dargestellt werden können.

Jetzt sollen zwei Voraussetzungen über die Function ϑ gemacht werden, für welche die entsprechenden Systeme von Differentialgleichungen (3.) in einer genauen gegenseitigen Beziehung stehen. Sei $f(dx)$ eine ganze homogene Function oder Form des p^{ten} Grades von den n Differentialen dx_a, deren Coefficienten von den Grössen x_b beliebig abhängen, und bei der die Determinante $\left|\frac{\partial^2 f(dx)}{\partial\, dx_a\, \partial\, dx_b}\right|$ nicht identisch verschwindet, sei die Zahl p gleich oder grösser als Zwei, U eine reine Function der Variabelen x_a, dann heisst die erste Voraussetzung

$$(8.)\qquad \vartheta = f\left(\frac{dx}{dt}\right) + U.$$

Vermöge derselben werden aus den Gleichungen (1.), (3.), (5.), (7.) beziehungsweise die Gleichungen

$$(1^a.)\qquad \Theta = \int_{t_0}^{t} (f(x') + U)\, dt,$$

$$(3^a.)\qquad \frac{d\dfrac{\partial f(x')}{\partial x'_a}}{dt} - \frac{\partial f(x')}{\partial x_a} - \frac{\partial U}{\partial x_a} = 0,$$

$$(5^a.)\qquad (p-1) f(x') - U = H,$$

$$(7^a.)\qquad \delta\Theta = -H\,\delta t + \sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}\,\delta x_a - \sum_a \frac{\partial f_0(x'(0))}{\partial x'_a(0)}\,\delta x_a(0).$$

Bei der Integration des Systems ($3^a.$) ist auf Grund von früheren Ausführungen anzunehmen, dass die Determinante $\left|\dfrac{\partial^2 f(x')}{\partial x'_a\,\partial x'_b}\right|$ für die Substitution der Anfangswerthe $x_a = x_a(0)$, $x'_a = x'_a(0)$ einen von Null verschiedenen Werth bekomme. Ich nehme ferner an, dass die Grösse $(p-1)f(x') = U+H$ für dieselbe Substitution einen positiven Werth habe, und dass die Integration sich auf ein positives Intervall $t-t_0$ beziehe, und zwar allein auf ein solches Intervall, in dem die Grösse $(p-1)f(x') = U+H$ einen positiven Werth behält.

Wofern die Function U nicht gleich einer Constante ist, so wird mit dem gewählten Werthe der Constante H die neue Form des p^{ten} Grades von den n Differentialen dx_a gebildet

$$(9.)\qquad F(dx) = \left(\frac{p(U+H)}{p-1}\right)^{p-1} p f(dx).$$

Wenn aber U gleich einer Constante ist, so gelte die Gleichung

$$(10.)\qquad F(dx) = p f(dx).$$

An diese Form $F(dx)$ schliesst sich die zweite über die Function ϑ zu treffende Voraussetzung

$$(11.)\qquad \vartheta = \left(F\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Die Werthverbindungen x_a und $\dfrac{dx_a}{dt}$ sind dadurch beschränkt, dass die Form $f\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$ und die Function $U+H$ nur positive Werthe erhalten dürfen; die p^{te} Wurzel aus einer positiven Grösse soll stets einen positiven Werth bezeichnen.

Durch (11.) verwandelt sich das Integral Θ in das Integral

$$(1^b.)\qquad R = \int_{t_0}^{t} (F(x'))^{\frac{1}{p}}\, dt = \int_{t_0}^{t} \Big(\frac{p(U+H)}{p-1}\Big)^{\frac{p-1}{p}} (pf(x'))^{\frac{1}{p}}\, dt,$$

beziehungsweise in das Integral

$$(1^{b}*.)\qquad R = \int_{t_0}^{t} (F(x'))^{\frac{1}{p}}\, dt = \int_{t_0}^{t} (pf(x'))^{\frac{1}{p}}\, dt,$$

je nachdem U nicht constant oder constant ist. Das System der isoperimetrischen Differentialgleichungen (3.) geht in das System

$$(3^b.)\qquad d\frac{\frac{\partial (F(x'))^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a}}{dt} - \frac{\partial (F(x'))^{\frac{1}{p}}}{\partial x_a} = 0$$

über, welches, da die durch (11.) definirte Function ϑ in Bezug auf die Grössen $\frac{dx_a}{dt}$ homogen und vom ersten Grade ist, in Folge der oben ausgesprochenen Bemerkung mit einem System von $(n-1)$ Differentialgleichungen zwischen den Variabelen x_a gleichbedeutend ist. Das System $(3^b.)$ kann vermittelst der Bezeichnung

$$(12.)\qquad \Omega = \frac{U+H}{(p-1)f(x')},$$

für ein nicht constantes U, oder

$$(12^*.)\ \Omega = \frac{1}{p f(x')},$$

für ein constantes U, und einer einfachen Reduction folgendermassen dargestellt werden

$$(3^{b}*.)\qquad \frac{1}{p}\Omega^{\frac{p-1}{p}}\left(\frac{d\frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}}{dt} - \frac{\partial f(x')}{\partial x_a} - \frac{1}{\Omega}\frac{\partial U}{\partial x_a}\right) + \frac{1}{p}\frac{d\Omega^{\frac{p-1}{p}}}{dt}\frac{\partial f(x')}{\partial x'_a} = 0.$$

Die Gleichung (7*.) liefert den Ausdruck für das vollständige Differential der Grösse R, die als reine Function der Werthsysteme x_a und $x_a(0)$ aufgefasst werden kann,

$$(7^b.)\qquad \delta R = \sum_a \frac{\partial (F(x'))^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a}\delta x_a - \sum_a \frac{\partial (F_0(x'(0)))^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0).$$

Für ein nicht constantes U ist derselbe gleich dem folgenden

$$(7^{b}*.)\qquad \begin{cases} \delta R = \Big(\frac{U+H}{(p-1)f(x')}\Big)^{\frac{p-1}{p}} \sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}\delta x_a \\ \qquad -\Big(\frac{U_0+H}{(p-1)f_0(x'(0))}\Big)^{\frac{p-1}{p}} \sum_a \frac{\partial f_0(x'(0))}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0); \end{cases}$$

für ein constantes U hat man in (7^b*.) die Substitution

$$(10^*.) \qquad \frac{p(U+H)}{p-1} = \frac{p(U_0+H)}{p-1} = 1$$

vorzunehmen.

Die Art der Beziehung zwischen dem System (3^a.) und dem System (3^b*.) richtet sich nach dem mehrfach hervorgehobenen Umstande, ob die Function U gleich einer Constante ist oder nicht. In dem ersten Falle sind die Ausdrücke $\frac{\partial U}{\partial x_a} = 0$, und es ist möglich, aus dem System (3^a.) die Variabele t unmittelbar zu eliminiren *). Das Resultat dieser Elimination wird durch das System (3^b*.) dargestellt; denn das System (3^a.) hat die Gleichung $\frac{df(x')}{dt} = 0$, und deshalb auch die Gleichung $\frac{d\Omega}{dt} = 0$ zur Folge, und vermöge dieser Gleichungen und der Gleichungen $\frac{\partial U}{\partial x_a} = 0$ ergiebt sich das System (3^b*.) aus dem System (3^a.). In dem zweiten Falle, wo die Function U nicht gleich einer Constante ist, kann man aus dem System (3^a.) die Variabele t mit Hülfe des Integrals (5^a.) eliminiren. Das Resultat dieser Elimination wird ebenfalls durch das System (3^b*.) dargestellt; denn das Integral (5^a.) des Systems (3^a.) ist mit der Gleichung

$$(13.) \qquad \Omega = 1$$

aequivalent, und bei Hinzuziehung derselben folgt das System (3^b*.) aus dem System (3^a.). Da die Variabele t in dem System (3^b*.) nur formell auftritt, so kann man statt derselben auch eine beliebige Variabele x_{ϵ_1} aus den Variabelen x_a substituiren und dadurch, wie schon erwähnt, die $(n-1)$ anderen Variabelen x_ϵ von dieser abhängig machen. Unter den n Differentialgleichungen des Systems (3^b*.) sind dann immer $n-1$ von der Beschaffenheit, dass vermöge derselben die $n-1$ zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2 x_\epsilon}{(dx_{\epsilon_1})^2}$ eindeutig durch die ersten Differentialquotienten und die Variabelen ausgedrückt werden. Denn die n Ableitungen der Determinante $\left|\frac{\partial^2 f(x')}{\partial x'_a \partial x'_b}\right|$ nach den Elementen $\frac{\partial^2 f(x')}{\partial x'_a \partial x'_{\epsilon_1}}$ können nicht sämmtlich verschwinden, ohne dass die Determinante ebenfalls verschwindet. Sobald nun das System (3^b*.) in der oben bezeichneten Weise vollständig integrirt ist, so dass dem Werthe $x_{\epsilon_1} = x_{\epsilon_1}(0)$ die Werthe der Variabelen $x_\epsilon = x_\epsilon(0)$ und die Werthe der Differentialquotienten

*) *Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen*, d. Journal Bd. 70, pag. 88.

$\frac{dx_\iota}{dx_{\iota_1}} = \frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}$ entsprechen, dann ergiebt sich eine vollständige Integration des Systems (3^a.), bei der für den Werth $t = t_0$ die Variabelen x_a und die Differentialquotienten $\frac{dx_a}{dt}$ die correspondirenden Werthe $x_a(0)$ und $x'_a(0)$ annehmen durch Ausführung einer einfachen Integration. Die Abhängigkeit der Variabele x_{ι_1} von der Variabele t wird bei einem constanten U durch die Gleichung

$$\frac{df(x')}{dt} = 0,$$

bei einem nicht constanten U durch die Gleichung (13.)

$$\Omega = 1$$

dargestellt. Daher entsteht für den letzteren Fall die Gleichung

$$(14.)\qquad t - t_0 = \int_{x_{\iota_1}(0)}^{x_{\iota_1}} \sqrt[p]{\frac{(p-1)f\left(\frac{dx}{dx_{\iota_1}}\right)}{U+H}}\, dx_{\iota_1}$$

und für den ersteren Fall die Gleichung

$$(14^*.)\qquad t - t_0 = \int_{x_{\iota_1}(0)}^{x_{\iota_1}} \sqrt[p]{\frac{f\left(\frac{dx}{dx_{\iota_1}}\right)}{f_0(x'(0))}}\, dx_{\iota_1}.$$

Wenn dagegen das System (3^a.) in der vorgeschriebenen Weise vollständig integrirt ist, so liefert die bezügliche Elimination Ausdrücke der Variabelen x_ι durch die Variabele x_{ι_1}, welche das System (3^{b*}.) unter den entsprechenden Bedingungen vollständig integriren. Vermöge der Integration des Systems (3^a.) entsteht für das Integral R, sobald U nicht constant ist, aus (1^b.) die Gestalt

$$(15.)\qquad R = \int_{t_0}^{t} p f(x')\, dt,$$

wenn aber U constant ist, aus (1^{b*}.) die Gestalt

$$(15^*.)\qquad R = (p f_0(x'(0)))^{\frac{1}{p}} (t - t_0).$$

2.

Eine Hauptabsicht der gegenwärtigen Untersuchung geht auf die Erörterung des Zusammenhangs, der zwischen dem System von isoperimetrischen

Differentialgleichungen (3^a.) bei einer ganz beliebigen Function U und den Eigenschaften der Form $F(dx)$ besteht. Ich werde zu diesem Behufe zunächst die Zahl $p=2$ voraussetzen und die Bedeutung aussprechen, welche die bis jetzt eingeführten Begriffe in dem Gebiete der reellen Mechanik haben.

Wenn ein System von Massenpunkten gegeben ist, für dessen Bewegung von der Zeit unabhängige Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten existiren, und die herrschenden Kräfte durch eine Kräftefunction dargestellt werden können, so denkt man sich die Coordinaten der Massenpunkte durch n independente Variabele x_a ausgedrückt, und es sei die Zeit gleich t, die Summe der lebendigen Kräfte des Systems gleich der quadratischen Form $2f\left(\frac{dx}{dt}\right)$, die Kräftefunction gleich der Function U. Dann ergiebt nach der Bemerkung *Hamiltons* das Variationsproblem des Integrals (1^a.)

$$\Theta = \int_{t_0}^{t} (f(x')+U)\,dt$$

das System der Differentialgleichungen der Bewegung (3^a.)

$$\frac{d\frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}}{dt} - \frac{\partial f(x')}{\partial x_a} - \frac{\partial U}{\partial x_a} = 0,$$

und die Gleichung (5^a.)

$$f(x')-U = H$$

wird *das Integral der lebendigen Kraft.* Gleichzeitig erhält das Integral (1^b.) die Gestalt

$$R = \int_{t_0}^{t} 2(U+H)^{\frac{1}{2}}(f(x'))^{\frac{1}{2}}\,dt,$$

welche *Jacobi dem Integral der kleinsten Wirkung* pag. 43 der Vorlesungen über Dynamik gegeben hat, und das System (3^b.) wird *das System der Differentialgleichungen der Bewegung, das aus dem Princip der kleinsten Wirkung folgt. Jacobi* hat an der angeführten Stelle die Reduction des Systems (3^b.) auf das System (3^a.) unter der Annahme entwickelt, dass die Massenpunkte frei sind, oder, dass für positive Constanten μ_a die Form $2f(dx) = \sum_a \mu_a dx_a^2$ ist.

Das Integral der kleinsten Wirkung R verwandelt sich vermöge der Gleichung (15.) in das Integral

$$R = \int_{t_0}^{t} 2f(x')\,dt,$$

welches *Hamilton* als *die angehäufte lebendige Kraft* bezeichnet, und dieses geht durch die Einführung der Grössen x_a und $x_a(0)$ in die Function über, welche *Hamilton die charakteristische Function des mechanischen Problems* nennt. Das vollständige Differential derselben wird nach (7^{b*}.) durch die Gleichung

$$(16.)\qquad \delta R = \left(\frac{U+H}{f(x')}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}\,\delta x_a - \left(\frac{U_0+H}{f_0 x'(0)}\right)^{\frac{1}{2}} \delta x_a(0)$$

dargestellt. Sie entspricht, sobald $2f(dx) = \Sigma \mu_a dx_a^2$ ist, der Gleichung (A.) auf pag. 251 der angeführten *Hamilton*schen Abhandlung; nur der Werth H, der gegenwärtig als fest gilt, wird bei *Hamilton* ebenfalls variirt. Die charakteristische Function R hat vermöge der Gleichung (16.) die Ableitungen

$$\frac{\partial R}{\partial x_a} = \left(\frac{U+H}{f(x')}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a},$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_a(0)} = -\left(\frac{U_0+H}{f_0(x'(0))}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial f_0(x'(0))}{\partial x'_a(0)}.$$

Wenn nun die quadratische Form $f(dx)$, ihre Determinante und ihre adjungirten Elemente, wie folgt, bezeichnet werden

$$(17.)\qquad \begin{cases} f(dx) = \frac{1}{2} \sum_{a,b} a_{a,b}\, dx_a\, dx_b, \\ |a_{a,b}| = \Delta, \quad \dfrac{\partial \Delta}{\partial a_{a,b}} = A_{a,b}, \end{cases}$$

so liefern die Ausdrücke von $\frac{\partial R}{\partial x_a}$ und $\frac{\partial R}{\partial x_a(0)}$ *die beiden Hamiltonschen partiellen Differentialgleichungen*

$$(18.)\qquad \sum_{a,b} \frac{A_{a,b}}{\Delta} \frac{\partial R}{\partial x_a} \frac{\partial R}{\partial x_b} = 2(U+H),$$

$$(19.)\qquad \sum_{a,b} \frac{A_{a,b}(0)}{\Delta(0)} \frac{\partial R}{\partial x_a(0)} \frac{\partial R}{\partial x_b(0)} = 2(U_0+H).$$

Die so eben unter der Voraussetzung $p = 2$ aufgestellten Formeln beziehen sich sämmtlich auf ein nicht constantes U; die entsprechenden Formeln, bei denen U constant ist, werden aus den ersteren durch die Substitution

$$(10^{**}.)\qquad 2(U+H) = 2(U_0+H) = 1$$

abgeleitet.

Der Zusammenhang zwischen dem System der Differentialgleichungen der Bewegung (8^a.) und der quadratischen Form

$$(9^*.)\qquad F(dx) = 2(U+H)2f(dx)$$

gründet sich darauf, dass die dem Bewegungsproblem zugehörige partielle Differentialgleichung (18.) als eine Transformationsrelation dieser Form aufgefasst werden kann.

Bei dem Problem der kürzesten Linie auf einer gegebenen Oberfläche hat *Gauss* diesen Zusammenhang in den *disquisitiones generales circa superficies curvas* kennen gelehrt. Der Ort eines materiellen Punktes, der sich auf einer gegebenen Oberfläche bewegen muss, und auf den keine beschleunigenden Kräfte wirken, sei durch die independenten Variabelen x_1, x_2 bestimmt, das Quadrat des Linearelements in der Oberfläche habe den Ausdruck

$$2f(dx) = a_{1,1}dx_1^2+2a_{1,2}dx_1dx_2+a_{2,2}dx_2^2.$$

Dann misst das Integral R den von dem Orte $(x_1(0), x_2(0))$ bis zu dem Orte (x_1, x_2) durchlaufenen Weg des Punktes, und dieser Weg muss nach dem Princip der kleinsten Wirkung ein Minimum sein. Wenn nun durch Φ der Winkel oder eine beliebige Function des Winkels bezeichnet wird, den das Anfangselement der von dem Orte $(x_1(0), x_2(0))$ ausgehenden kürzesten Linie mit dem Element dx_1 bildet, so kann man die Grössen R und Φ als neue Variabele statt x_1 und x_2 einführen und erhält nach art. 19. der angeführten Schrift die Transformation für das Quadrat des Linearelements

$$2f(dx) = dR^2+m^2d\Phi^2.$$

Die Coefficienten der Form, die zu der neuen Form $(1, 0, m^2)$ adjungirt ist, durch die Determinante m^2 dividirt, sind die Grössen 1, 0, $\frac{1}{m^2}$. Dieselben werden vermittelst der Coefficienten der ursprünglichen Form, wie folgt, ausgedrückt

$$(18^*.)\quad \begin{cases} \frac{1}{\Delta}\left(a_{1,1}\left(\frac{\partial R}{\partial x_1}\right)^2-2a_{1,2}\frac{\partial R}{\partial x_1}\frac{\partial R}{\partial x_2}+a_{2,2}\left(\frac{\partial R}{\partial x_2}\right)^2\right) = 1, \\ \frac{1}{\Delta}\left(a_{1,1}\frac{\partial R}{\partial x_1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}-a_{1,2}\left(\frac{\partial R}{\partial x_1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}+\frac{\partial R}{\partial x_2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right)+a_{2,2}\frac{\partial R}{\partial x_2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right) = 0, \\ \frac{1}{\Delta}\left(a_{1,1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right)^2-2a_{1,2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}+a_{2,2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right)^2\right) = \frac{1}{m^2}. \end{cases}$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen sind die Gleichungen (5.) und (6.) in art. 22. der *disquisitiones generales*. Die erstere fällt überdies mit der obigen Gleichung (18.) zusammen, da in derselben für den vorliegenden Zweck $U=0$ und $2(U+H)=1$ genommen werden muss *).

Herr *Beltrami* hat eine analoge Betrachtung für den Fall durchgeführt, dass $f(dx)$ eine beliebige quadratische Form, und die Function $U=0$ ist; diese Betrachtung ist jedoch allein auf geometrische, nicht auf mechanische

*) *Weingarten: Ueber die Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren;* d. Journal Bd. 62 pag. 63.

Vorstellungen bezogen. Aus den Forschungen *Jacobis*, welche an die Differentialgleichung (18.) anknüpfen, muss ich namentlich das Resultat herausheben, dass jedes vollständige Integral dieser Differentialgleichung eine vollständige Integration des zugeordneten Systems von mechanischen Differentialgleichungen (3^a.) liefert. Die Untersuchung der Transformation der in (9.) und (10.) definirten Form des p^{ten} Grades $F(dx)$ wird auch eine Begründung jenes von *Jacobi* gefundenen Resultats ergeben.

3.

Ein System von neuen Variabelen, das zur Transformation der Form $F(dx)$ dienen soll, wird aus der vollständigen Integration des Systems von Differentialgleichungen (3^b.) abgeleitet. Nachdem die $(n-1)$ Variabelen $x_\mathfrak{c}$ in der angegebenen Weise durch die Variabele $x_{\mathfrak{c}_1}$ ausgedrückt sind, stelle man das Integral R durch die Gleichung

$$(20.)\qquad R = \int_{x_{\mathfrak{c}_1}(0)}^{x_{\mathfrak{c}_1}} \left(F\left(\frac{dx}{dx_{\mathfrak{c}_1}}\right)\right)^{\frac{1}{p}} dx_{\mathfrak{c}_1}$$

als Function der Variabele $x_{\mathfrak{c}_1}$ dar. Hierauf betrachte man, die Beziehung umkehrend, $x_{\mathfrak{c}_1}$ als Function von R. Dann werden auch die Integrationswerthe der Variabelen $x_\mathfrak{c}$ von R abhängig, und man erhält Ausdrücke der sämmtlichen Variabelen $x_\mathfrak{a}$ durch R, durch die $(n-1)$ Verhältnisse $\frac{x'_\mathfrak{c}(0)}{x'_{\mathfrak{c}_1}(0)}$ und durch die n Grössen $x_\mathfrak{a}(0)$. In diesen Ausdrücken werden die n Grössen $x_\mathfrak{a}(0)$ als constant angesehen, und die Grösse R in Verbindung mit den $(n-1)$ Verhältnissen $\frac{x'_\mathfrak{c}(0)}{x'_{\mathfrak{c}_1}(0)}$ bildet ein System von neuen Variabelen, das dem gegenwärtigen Zwecke entspricht. Nach einer in dem ersten Artikel gemachten Bemerkung müssen die Verhältnisse $\frac{x'_\mathfrak{c}(0)}{x'_{\mathfrak{c}_1}(0)}$ eindeutige Functionen der Grössen $x_\mathfrak{a}$ sein, damit R eine eindeutige Function dieser Grössen werde. Ich setze voraus, dass die Verhältnisse $\frac{x'_\mathfrak{c}(0)}{x'_{\mathfrak{c}_1}(0)}$ und die Grösse R diese Beschaffenheit haben, dass also die Variabelen $x_\mathfrak{a}$ unabhängige Functionen der neuen Variabelen sind *). Ein allgemeineres hier anwendbares System von Variabelen entsteht

*) Auf den Inhalt dieser Forderung bezieht sich der Aufsatz: *Beiträge zu der Theorie der Umkehrung eines Functionensystems,* Nachrichten d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1870, November.

dadurch, dass man zu der Grösse R ein System von $(n-1)$ beliebigen unabhängigen Functionen $\Phi_2, \Phi_3, \ldots \Phi_n$ der $(n-1)$ Verhältnisse $\frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}$ hinzufügt.

Es gewährt ein Interesse, zu beobachten, in welche Abhängigkeit die Grösse R von der Variabele t treten muss, damit aus der Integration des Systems (3^b.) die Integration des Systems (3^a.) hervorgehe. Nach der Definition von R ist

$$(20^*.) \qquad \frac{dR}{dt} = \left(F\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Hieraus folgt, wenn U nicht constant ist, vermöge des Integrals (5^a.) die Gleichung

$$\frac{dR}{dt} = \frac{p(U+H)}{p-1},$$

und es kommt, weil R für $t = t_0$ verschwindet, die Beziehung

$$(21.) \qquad t-t_0 = \int_0^R \frac{(p-1)\,dR}{p(U+H)}.$$

Wenn dagegen U constant ist, so gilt die oben gebildete Gleichung (15*.), und man hat

$$t-t_0 = \frac{R}{(pf_0(x'(0)))^{\frac{1}{p}}},$$

Aus dem System der n Variabelen R, $\frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}$ folgt auch ein zweites System von n Variabelen, das zwar nicht für den Zweck der vorzunehmenden Transformation geeignet ist, doch für sich selbst Beachtung verdient. Es ist das System

$$(22.) \qquad \frac{x'_a(0)}{(F_0(x'(0)))^{\frac{1}{p}}} R,$$

bei welchem die Brüche $\frac{x'_a(0)}{(F_0(x'(0)))^{\frac{1}{p}}}$ nur von den $n-1$ Verhältnissen $\frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}$ abhängen. Die Eigenschaften dieses Systems kommen zur Erscheinung, sobald man bei den behandelten Variationsproblemen statt der Variabelen x_a ein beliebiges System von neuen unabhängigen Variabelen y_b einführt. Die transformirten Systeme von isoperimetrischen Differentialgleichungen denkt man sich so integrirt, dass die Constante H den ursprünglichen Werth behält, und dass die Anfangswerthe $y_b(0)$, $y'_b(0)$ mit den Anfangswerthen $x_a(0)$, $x'_a(0)$ correspondiren. Es komme alsdann

$$(23.)\quad \begin{cases} f(dx) = g(dy), \\ F(dx) = G(dy), \end{cases}$$

so wird

$$(24.)\quad \begin{cases} R = \int_{t_0}^{t} (F(x'))^{\frac{1}{p}}\, dt = \int_{t_0}^{t} (G(y'))^{\frac{1}{p}}\, dt, \\ \left(\frac{dR}{dt}\right)_{t=t_0} = F_0(x'(0)) = G_0(y'(0)), \\ x'_a(0) = \sum_{t} \left(\frac{\partial x_a}{\partial y_t}\right)_0 y'_t(0). \end{cases}$$

Wenn man nun für die transformirten Variationsprobleme das System (22.) bildet, so geht sowohl das Integral R wie auch der Ausdruck $(F_0(x'(0)))^{\frac{1}{p}}$ in sich selbst über, und die neuen Grössen

$$(25.)\quad \frac{y'_t(0)}{(G_0(y'(0)))^{\frac{1}{p}}} R$$

sind mit den Grössen (22.) durch lineare Gleichungen von constanten Coefficienten verbunden. In dem Fall, dass U constant ist, hat man $F(dx) = pf(dx)$, und es werden die Ausdrücke (22.) durch die Gleichung (15*.) gleich den Ausdrücken

$$x'_a(0)\,(t-t_0),$$

welche, d. Journal Bd. 72, pag. 4, als *die Normalvariabelen der Form* $f(dx)$ bezeichnet sind. Die Ausdrücke (22.) spielen für die Form $F(dx)$ eine gleiche Rolle, und mit Hülfe derselben ist es möglich, die in Betreff der Form $f(dx)$ angestellten Speculationen auf die Form $F(dx)$ zu übertragen. Da die Variabelen $x_a = x_a(0)$ werden, sobald R gleich Null wird, so ergiebt die Entwickelung der Grössen x_a, welche das System (3^b.) vollständig integriren, nach den Potenzen der Variabele R bis auf Glieder der ersten Ordnung die Gleichungen

$$(26.)\quad x_a = x_a(0) + \frac{x'_a(0)}{\left(\frac{dR}{dt}\right)_{t=t_0}} R.$$

Die Glieder der ersten Ordnung selbst sind die Normalvariabelen (22.), und diese Eigenschaft begründet eine Definition derselben.

Wenn man die Differentiation der Grössen x_a nach der Variabele t durch eine Differentiation nach der Variabele R ersetzt, so folgt aus (20*.) die Gleichung

$$(27.)\qquad F\left(\frac{dx}{dR}\right) = 1,$$

mithin durch Substitution der Anfangswerthe auch die Gleichung

$$(28.)\qquad F_0\left(\left(\frac{dx}{dR}\right)_0\right) = 1.$$

In der Gleichung (7^b.) sind die Ausdrücke $\dfrac{\partial(F(x'))^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a}$ homogene Functionen der Grössen x'_b von der Ordnung Null, die Ausdrücke $\dfrac{\partial(F_0(x'(0)))^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a(0)}$ ebensolche Functionen von den Grössen $x'_b(0)$. Deshalb kann die Differentiation nach R für die Differentiation nach t unmittelbar eintreten, und es entsteht die Gleichung

$$(29.)\qquad \delta R = \sum_a \frac{\partial\left(F\left(\frac{dx}{dR}\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\partial\left(\frac{dx_a}{dR}\right)}\delta x_a - \sum_a \frac{\partial\left(F_0\left(\left(\frac{dx}{dR}\right)_0\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\partial\left(\left(\frac{dx_a}{dR}\right)_0\right)}\delta x_a(0).$$

Dieselbe verwandelt sich, wenn beide Seiten mit dem Factor R^{p-1} multiplicirt werden, vermöge der aus (27.) und (28.) folgenden Relation

$$(27^*.)\qquad R^p = F\left(\frac{dx}{dR}R\right) = F_0\left(\left(\frac{dx}{dR}\right)_0 R\right)$$

in die Gleichung (12.), d. Journal Bd. 72, pag. 7, sobald $\left(\frac{dx_a}{dR}\right)_0 R$ durch u_a, $\frac{dx_a}{dR}R$ durch v_a, $F(dx)$ durch $pf(dx)$, $F_0(dx)$ durch $pf_0(dx)$ ersetzt wird. Diese Gleichung ist das wesentlichste Hülfsmittel für die dortigen Untersuchungen.

4.

Wenn man die n Variabelen x_a durch die im vorigen Artikel bestimmten neuen n Variabelen $R, \Phi_2, \Phi_3, \ldots \Phi_n$ ausgedrückt hat, so sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_a}{\partial R}$ nichts anderes, als diejenigen Ableitungen, welche soeben mit $\frac{dx_a}{dR}$ bezeichnet sind; denn bei der Differentiation der Integrationswerthe

x_a nach der Grösse R werden die $(n-1)$ Verhältnisse $\frac{x'_c(0)}{x'_{c_1}(0)}$ nicht berührt. Demnach, und weil die Grössen $x_a(0)$ überhaupt als constant gelten, folgen aus (29.) und (27.) die Gleichungen

$$(30.)\qquad \delta R = \sum_a \frac{\partial\left(F\left(\frac{\partial x}{\partial R}\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial R}\right)}\,\delta x_a$$

und

$$(31.)\qquad F\left(\frac{\partial x}{\partial R}\right) = 1.$$

Die Verbindung derselben liefert das Resultat

$$(32.)\qquad \delta R = \frac{1}{p}\sum_a \frac{\partial F\left(\frac{\partial x}{\partial R}\right)}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial R}\right)}\,\delta x_a.$$

Hieraus lässt sich die Grundeigenschaft der Form entwickeln, in welche $F(dx)$ durch die Substitution der Variabelen R, $\Phi_2, \ldots \Phi_n$ übergeht.

Gesetzt, die Form $F(dx)$ werde, wie in (23.), durch die Substitution eines beliebigen Systems y_b transformirt; dann sind die dx_a lineare Functionen der dy_b. Das Gleiche gelte von den δx_a und den δy_b, dann gilt es auch von den Aggregaten $dx_a+\delta x_a$ und $dy_b+\delta y_b$. Man hat also die Gleichung

$$F(dx+\delta x) = G(dy+\delta y),$$

und bei einer Entwickelung der beiden Seiten müssen diejenigen Aggregate links den Aggregaten rechts gleich sein, in welchen der Grad in Bezug auf die dx_a dem Grade in Bezug auf die dy_b, und der Grad in Bezug auf die δx_a dem Grade in Bezug auf die δy_b respective gleich ist. Wenn man die Differentiale dx_a der Einschränkung unterwirft, dass $dx_a = \frac{\partial x_a}{\partial y_1}dy_1$ sei, so sind die Differentiale $dy_2, dy_3, \ldots dy_n$ gleich Null zu setzen. Unter dieser Voraussetzung giebt die Gleichsetzung der Aggregate, die nach den δx_a und den δy_b von der ersten Ordnung sind, die Relation

$$(33.)\qquad \sum_a \frac{\partial F(dx)}{\partial\, dx_a}\delta x_a = \frac{1}{1.2.3\ldots(p-1)}\;\frac{\partial^{p-1}G(\delta y)}{\partial(\delta y_1)^{p-1}}dy_1^{p-1}.$$

In $G(\delta y)$ sei das Aggregat der Glieder, welche δy_1 in der p^{ten} und $(p-1)^{\text{ten}}$ Potenz enthalten, das folgende

$$(34.)\qquad G_1\delta y_1^p + p\,G_2\delta y_1^{p-1}\delta y_2 + \cdots + p\,G_n\delta y_1^{p-1}\delta y_n;$$

dann folgt aus (33.) unter Fortlassung des Factors dy_1^{p-1} die Gleichung

$$(35.)\qquad \sum_a \frac{\partial F\left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial y_1}\right)}\delta x_a = p(G_1\delta y_1+\cdots+G_n\delta y_n).$$

Ich betrachte nun die Transformation der Form $F(dx)$, bei welcher

$$y_1 = R,\quad y_2 = \Phi_2,\quad \ldots\quad y_n = \Phi_n$$

ist; die linke Seite von (35.) wird gleich der rechten Seite von (32.), in die Zahl p multiplicirt, und aus (32.) folgt die Relation

$$(36.)\qquad \delta R = G_1\delta R + G_2\delta\Phi_2+\cdots+G_n\delta\Phi_n.$$

Also bestehen nothwendig die n Gleichungen

$$(36^*.)\qquad G_1 = 1,\quad G_2 = 0,\quad \ldots\quad G_n = 0,$$

und es gilt das

Theorem I. Wenn man die Form $F(dx)$ durch die Einführung der Variabelen R, Φ_2, ... Φ_n transformirt, so ist in der resultirenden Form der Coefficient der Potenz dR^p gleich der Einheit, und die Coefficienten der $(n-1)$ Verbindungen $dR^{p-1}d\Phi_2$, ... $dR^{p-1}d\Phi_n$ sind gleich der Null.

5.

Das in dem vorigen Artikel definirte System R, Φ_2, Φ_3, ... Φ_n hat vermöge seiner Entstehung die Eigenschaft, dass das Constantsetzen der $n-1$ Variabelen Φ_2, ... Φ_n eine Integration des Systems von Differentialgleichungen (3^b.) darstellt. Insofern entspricht dem bewiesenen Theorem als Umkehrung das

Theorem II. Wenn die Form $F(dx)$ durch ein System von neuen Variabelen y_1, y_2, ... y_n in eine Form $G(dy)$ übergeht, bei der der Coefficient der Potenz dy_1^p gleich der Einheit ist, und die Coefficienten der $(n-1)$ Verbindungen $dy_1^{p-1}dy_2$, ... $dy_1^{p-1}dy_n$ gleich der Null sind, so wird das System von Differentialgleichungen (3^b.) durch das Constantsetzen der $(n-1)$ Functionen y_2, y_3, ... y_n integrirt.

Da das Integral R durch die Einführung der Variabelen y_1, y_2, ... y_n, wie in (24.), die Gestalt

$$R = \int_{t_0}^{t}\left(G\left(\frac{dy}{dt}\right)\right)^{\frac{1}{p}}dt$$

annimmt, so tritt an die Stelle des Systems (3^b.) das System

$$(37.)\qquad \frac{d\dfrac{\partial(G(y'))^{\frac{1}{p}}}{\partial y'_a}}{dt} - \frac{\partial(G(y'))^{\frac{1}{p}}}{\partial y_a} = 0.$$

Hier ist jede Gleichung eine Folge der $(n-1)$ übrigen Gleichungen; daher genügt es, die $(n-1)$ Gleichungen zu betrachten, in denen $a=\mathfrak{r}$ ist, wo $\mathfrak{r}$ die Reihe der Zahlen 2, 3, ... n durchläuft. Aus den über die Form $G(dy)$ geltenden Voraussetzungen geht hervor, dass die Ableitungen $\frac{\partial G(y')}{\partial y'_\mathfrak{r}}$ Aggregate sind, von denen jedes Glied die Grössen $y'_2, \dots y'_n$ mindestens in der ersten Dimension enthält, und dass die Ableitungen $\frac{\partial G(y')}{\partial y_\mathfrak{r}}$ Aggregate sind, von denen jedes Glied die Grössen $y'_2, y'_3, \dots y'_n$ mindestens in der zweiten Dimension enthält. Die $(n-1)$ Gleichungen (37.), in denen $a=\mathfrak{r}$ ist, werden deshalb erfüllt, sobald man die $(n-1)$ Differentialquotienten $y'_\mathfrak{r}=0$ annimmt. Also ist die Behauptung gerechtfertigt, dass das Constantsetzen der $(n-1)$ Functionen $y_\mathfrak{r}$

$$(38.)\qquad y_\mathfrak{r} = y_\mathfrak{r}(0)$$

eine Integration des Systems von Differentialgleichungen (3^b.) liefert.

Der Ausdruck der Function R gestaltet sich bei der Einführung dieser Integrationswerthe sehr einfach. Durch die Gleichungen $y'_\mathfrak{r}=0$ wird $G(y')=(y'_1)^p$, und deshalb, so lange y'_1 positiv ist, $(G(y'))^{\frac{1}{p}}=y'_1$; mithin ist R, wie folgt, ohne Integralzeichen darstellbar

$$(39.)\qquad R = y_1 - y_1(0).$$

6.

Die Darstellung des exacten Differentials der Function R in (30.) enthält das Schema zu einer Aufgabe, die mit der *Hamilton*schen partiellen Differentialgleichung für die Function R äquivalent ist. Die Aufgabe ist die, eine Function P der n Variabelen x_a zu bestimmen, deren exactes Differential die Bedingung

$$(40.)\qquad \delta P = \sum_a \frac{\partial(F(\xi))^{\frac{1}{p}}}{\partial \xi_a}\delta x_a$$

befriedigt. Hier treten von den n Grössen ξ_a, die in $F(dx)$ statt der Differentiale dx_a substituirt sind, in den n Gleichungen

$$(41.)\qquad \frac{\partial P}{\partial x_a} = \frac{\partial(F(\xi))^{\frac{1}{p}}}{\partial \xi_a}$$

nur die $(n-1)$ Verhältnisse auf, und die Elimination dieser Verhältnisse aus den n Gleichungen bringt die *Hamilton*sche partielle Differentialgleichung für die Function P hervor. Unter der Voraussetzung, dass die Zahl $p=2$ ist, entsteht auf diese Weise die obige Gleichung (18.). Wenn dagegen $p>2$ ist, so stehen der wirklichen Ausführung jener Elimination erhebliche algebraische Schwierigkeiten im Wege; für den gegenwärtigen Zweck ist aber die Möglichkeit der Elimination ausreichend.

Die Function R ist ein *vollständiges Integral* der Forderung (40.) vermöge der in R enthaltenen n willkürlichen Constanten $x_a(0)$. Wenn nun ein beliebiges *vollständiges Integral* der Forderung P, mit den willkürlichen Constanten $c_1, c_2, \dots c_n$, vorliegt, und wenn P in Verbindung mit $(n-1)$ von den Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial c_a}$ ein System von unabhängigen Functionen der Variabelen x_a darstellt, so verwandelt sich die Form $F(dx)$ durch die Einführung dieses Systems von neuen Variabelen

$$(42.)\qquad P,\quad \Phi_2=\frac{\partial P}{\partial c_2},\quad \Phi_3=\frac{\partial P}{\partial c_3},\quad \dots\quad \Phi_n=\frac{\partial P}{\partial c_n}$$

in eine Form von denselben Eigenschaften, wie durch die Einführung des Systems $R, \Phi_2, \Phi_3, \dots \Phi_n$ in Artikel 4. Um dies zu begründen, hat man nur zu zeigen, dass die in Bezug auf das System (42.) gebildeten partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_a}{\partial P}$ die Gleichungen

$$(43.)\qquad \delta P = \sum_a \frac{\partial\left(F\left(\frac{\partial x}{\partial P}\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial P}\right)}\delta x_a$$

und

$$(44.)\qquad F\left(\frac{\partial x}{\partial P}\right) = 1$$

erfüllen, die den obigen Gleichungen (30.) und (31.) entsprechen. Denn die Schlüsse des gegebenen Beweises sind allein auf diese Gleichungen gegründet.

Die Substitution der Grössen ξ_a statt der Differentiale dx_a in (40.) ergiebt die Gleichung

$$(45.)\qquad \sum_a \frac{\partial P}{\partial x_a}\xi_a = (F(\xi))^{\frac{1}{p}}.$$

Durch die Gleichungen (41.) sind die Verhältnisse der Grössen ξ_a in ihrer Abhängigkeit von den Variabelen x_a und den Constanten $c_1, c_2, \dots c_n$ des

Integrals P bestimmt. Die Grössen ξ_a werden vollständig bestimmt, sobald man zwischen denselben noch die Gleichung

$$(46.)\qquad F(\xi) = 1$$

annimmt. Durch partielle Differentiation nach einer der Constanten c_f folgt aus (45.) die Gleichung

$$(47.)\qquad \sum_a \frac{\partial^2 P}{\partial x_a \partial c_f}\xi_a + \sum_a \frac{\partial P}{\partial x_a}\frac{\partial \xi_a}{\partial c_f} = \sum_a \frac{\partial (F(\xi))^{\frac{1}{p}}}{\partial \xi_a}\frac{\partial \xi_a}{\partial c_f},$$

die durch die Relation (41.) in die Gleichung

$$(48.)\qquad \sum_a \frac{\partial^2 P}{\partial x_a \partial c_f}\xi_a = 0$$

übergeht. Dieselbe lehrt, wenn f alle Werthe von 1 bis n durchläuft, dass die Functionaldeterminante der n Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial c_1}, \frac{\partial P}{\partial c_2}, \dots \frac{\partial P}{\partial c_n}$ in Bezug auf die n Variabelen x_a gleich Null sein muss, oder, dass diese n Ableitungen nicht von einander unabhängig sein können. Setzt man $f = \mathfrak{r} = 2, 3, \dots n$, ferner nach (42.) $\Phi_\mathfrak{r} = \frac{\partial P}{\partial c_\mathfrak{r}}$, und verbindet die Gleichungen (45.) und (46.), so entsteht das System von n Gleichungen

$$(49.)\qquad \begin{cases} \sum_a \frac{\partial P}{\partial x_a}\xi_a = 1, \\ \sum_a \frac{\partial \Phi_\mathfrak{r}}{\partial x_a}\xi_a = 0; \end{cases}$$

da nun vorausgesetzt ist, dass die Functionen P, $\Phi_\mathfrak{r}$ in Bezug auf die Variabelen x_a von einander unabhängig sind, so zieht das System (49.) die Gleichungen

$$(50.)\qquad \xi_a = \frac{\partial x_a}{\partial P}$$

nach sich. Demgemäss folgt aus (40.) die Gleichung (43.), und aus (46.) die Gleichung (44.), welche Gleichungen bewiesen werden sollten *).

7.

Wie man so eben gesehen hat, erfüllt das in (42.) definirte System von Variabelen P, $\Phi_\mathfrak{r}$ die Bedingungen, welche in dem Theorem des Artikels 5.

---

*) Es ist leicht einzusehen, dass, wenn man die Function P mit $(n-1)$ unabhängigen Functionen der $(n-1)$ Functionen $\frac{\partial P}{\partial c_\mathfrak{r}}$ verbindet, auch für dieses System von neuen Variabelen der gelieferte Beweis in Kraft bleibt; doch habe ich diese Verallgemeinerung absichtlich nicht in die Formeln des Textes eingeführt. *Gauss* bezeichnet den ganzen Umfang der willkürlichen Functionen bei seinem Problem *disqu. gen. circa superf. curv.* art. 22.

beziehungsweise für das System von Variabelen y_1, y_r vorausgesetzt werden. Also wird das System von Differentialgleichungen (3^b.) durch die $(n-1)$ Gleichungen

$$(51.)\qquad \Phi_r = \Phi_r(0)$$

integrirt, wo das Anhängen der Null, wie früher, die Substitution der Werthe $x_a = x_a(0)$ andeutet. Ferner giebt die Gleichung (39.), unter der Voraussetzung, dass $\frac{dP}{dt}$ positiv ist, oder dass P auf dem Wege der Integration stets zunimmt, für den Werth R die Bestimmung

$$(52.)\qquad R = P - P(0).$$

Die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x_a}{\partial P}$, bei denen $\Phi_2, \Phi_3, \dots \Phi_n$ constant bleiben, sind demnach gleich den Differentialquotienten $\frac{dx_a}{dR}$, die sich auf die Integration des Systems (3^b.) beziehen; aus (50.) folgen auf diese Weise die Gleichungen

$$(53.)\qquad \xi_a = \frac{dx_a}{dR},$$

aus (41.) die Gleichungen

$$(54.)\qquad \frac{\partial P}{\partial x_a} = \frac{\partial\left(F\left(\frac{dx}{dR}\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\partial\left(\frac{dx_a}{dR}\right)}.$$

Bei den Gleichungen (53.) ist die Gleichung (46.) eine nothwendige Voraussetzung; für die Verhältnisse der Grössen ξ_a, welche durch die Gleichungen (41.) ohne diese Voraussetzung bestimmt sind, gelten die Gleichungen

$$(53^*.)\qquad \frac{\xi_c}{\xi_{c_1}} = \frac{\frac{dx_c}{dR}}{\frac{dx_{c_1}}{dR}}.$$

Denselben entsprechen die aus (54.) abgeleiteten Gleichungen

$$(54^*.)\qquad \frac{\frac{\partial P}{\partial x_c}}{\frac{\partial P}{\partial x_{c_1}}} = \frac{\frac{\partial F\left(\frac{dx}{dR}\right)}{\partial\left(\frac{dx_c}{dR}\right)}}{\frac{\partial F\left(\frac{dx}{dR}\right)}{\partial\left(\frac{dx_{c_1}}{dR}\right)}}.$$

Aus den $(n-1)$ Integralen (51.) des Systems (3^b.) kann eine vollständige Integration desselben abgeleitet werden, die den in Artikel 1. gestellten Bedingungen genügt. Zu diesem Ende hat man in (53^*.) oder (54^*.) die Werthsysteme $x_a = x_a(0)$, $x'_a = x'_a(0)$ zu substituiren und bekommt, da in den Ausdrücken rechts $\frac{dx_a}{dR}$ durch $\frac{dx_a}{dt}$ ersetzt werden darf, respective die Systeme von Gleichungen

$$(53^{**}.)\qquad \frac{\xi_\epsilon(0)}{\xi_{\epsilon_1}(0)} = \frac{x'_\epsilon(0)}{x'_{\epsilon_1}(0)}.$$

$$(54^{**}.)\qquad \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x_\epsilon}\right)_0}{\left(\frac{\partial P}{\partial x_{\epsilon_1}}\right)_0} = \frac{\frac{\partial F_0(x'(0))}{\partial x'_\epsilon(0)}}{\frac{\partial F_0(x'(0))}{\partial x'_{\epsilon_1}(0)}}.$$

Vermöge des einen oder des anderen Systems sind die Constanten c_τ als Functionen der Verhältnisse $\frac{x'_\epsilon(0)}{x'_{\epsilon_1}(0)}$ darzustellen und in die Gleichungen (51.) zu substituiren; dann bestimmen diese die gesuchte Abhängigkeit der $(n-1)$ Variabelen x_ϵ von der übrig bleibenden Variabele x_{ϵ_1}.

Die Gleichungen (14.) und (14^*.) geben an, wie die ausgeführte Integration des Systems (3^b.) zu der Ausführung der entsprechenden vollständigen Integration des Systems (3^a.) angewendet werden kann, und damit ist die Methode *Jacobis* begründet, vermöge deren ein vollständiges Integral der Forderung (40.) eine vollständige Integration des Systems von Differentialgleichungen (3^a.) liefert.

In dem Falle, dass die Coefficienten der Form $F(dx)$ constant sind, wird das System (3^b.) dadurch integrirt, dass man die Verhältnisse $\frac{x'_\epsilon}{x'_{\epsilon_1}}$ gleich den constanten Anfangswerthen $\frac{x'_\epsilon(0)}{x'_{\epsilon_1}(0)}$ setzt und hieraus die Gleichungen

$$(55.)\qquad \frac{x_\epsilon - x_\epsilon(0)}{x_{\epsilon_1} - x_{\epsilon_1}(0)} = \frac{x'_\epsilon(0)}{x'_{\epsilon_1}(0)}$$

deducirt. Demnach werden die Ausdrücke auf der rechten Seite von (54.), wo die Werthe x_a das System (3^b.) integriren, gleich Constanten, und es entsteht das Resultat, dass die Gleichungen

$$(56.)\qquad \frac{\partial P}{\partial x_a} = \left(\frac{\partial P}{\partial x_a}\right)_0,$$

von denen $(n-1)$ die übrig bleibende zur Folge haben, ein System von $(n-1)$ Integralen des Systems von Differentialgleichungen (3^b.) bilden, welches mit dem System von $(n-1)$ Integralen (51.) äquivalent ist.

5.

Die Gleichung (52.) eröffnet einen neuen Gesichtspunkt zur Betrachtung der $(n-1)$ Integrale (51.) bei einer beliebigen Form $F(dx)$.

Ich fasse die Anfangswerthe $x_a(0)$ zusammen, für welche die Function $P(0)$ gleich einem beliebig gewählten festen Werthe A ist; diese Anfangssysteme bilden mithin eine Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Zu jedem System $x_a(0)$ werden die $(n-1)$ Verhältnisse $\frac{x'_c(0)}{x'_{c_1}(0)}$ durch die Gleichungen (54 **.) bestimmt, und die betreffende Integration des Systems (3^b.) bezeichnet für die Variabelen x_a eine bestimmte Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung. Die Totalität dieser Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung wird durch die $(n-1)$ Integrale (51.) in Verbindung mit der Gleichung

$$(57.)\qquad P(0) = A$$

dargestellt. Wenn man nun diese Mannigfaltigkeiten von den Systemen $x_a(0)$ an in dem Sinne fortsetzt, dass die Function P stets zunimmt, und soweit führt, dass für alle Endsysteme x_a die Gleichung

$$(58.)\qquad P = B$$

gilt, wo B wieder ein fester Werth ist, so lehrt die Gleichung (52.), dass das Integral R in allen denselben Werth

$$(59.)\qquad R = B - A$$

erhält. Gleichzeitig haben die Verhältnisse der Elemente $\frac{x'_c}{x'_{c_1}}$, welche der Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung von den Endsystemen x_a, $P=B$, entsprechen, die Eigenschaft, die Gleichungen (54*.) zu erfüllen, welche mit den Gleichungen (54**.) von gleicher Gestalt sind.

Wenn man bei der angestellten Ueberlegung statt des Integrals P die Function $R(\mathfrak{x}(0), x)$ substituirt, welche durch die Gleichungen $\mathfrak{x}_a(0) = x_a(0)$, $\mathfrak{x}_a = x_a$ aus der Function R hervorgeht, und zugleich die Constante A von der positiven Seite gegen die Null abnehmen lässt, so convergirt die Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung $R(\mathfrak{x}(0), x(0)) = A$ gegen das *einzige* Werthsystem $x_a(0) = \mathfrak{x}_a(0)$ *), und das entsprechende Ergebniss wirft ein neues Licht auf die Function $R(\mathfrak{x}(0), x)$ und ihre Ableitungen in Bezug auf die

---

*) In casu nostro circulus infinite parvus adoptari potest, centrum in eo puncto habens, a quo distantiae r numerantur, *disqu. gen. circa superf. curv.*, art. 22.

Constanten $\mathfrak{x}_a(0)$. Diese Ableitungen werden nach (29.) durch die Gleichungen

$$\frac{\partial R(x(0), x)}{\partial x_a(0)} = -\frac{\partial\left(F_0\left(\frac{dx}{dR}\right)_0\right)^{\frac{1}{p}}}{\partial\left(\left(\frac{dx_a}{dR}\right)_0\right)}$$

ausgedrückt, sobald statt der Bezeichnung $\mathfrak{x}_a(0)$ die Bezeichnung $x_a(0)$ eingeführt ist, und stehen in einer einfachen Beziehung zu dem System der Normalvariabelen (22.).

Auf dem eingeschlagenen Wege findet sich auch die Lösung der Aufgabe, wenn das System (3^b.) vollständig integrirt ist, ein Integral P der Forderung (40.) zu ermitteln, bei welchem die Gleichung

$$(60.) \qquad P = A$$

dieselbe Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung für die Variabelen x_a bestimmt wie eine gegebene Gleichung

$$(61.) \qquad \mathfrak{R} = A.$$

Hier bedeutet A, wie früher, einen constanten Werth, $\mathfrak{R}$ eine willkürlich angenommene Function der Variabelen x_a.

Vermöge der Integration des Systems (3^b.) seien die Verhältnisse $\frac{x'_\mathfrak{c}(0)}{x'_{\mathfrak{c}_1}(0)}$ und die Grösse R, wie in Artikel 3, durch die Systeme von Werthen x_a und $x_a(0)$ ausgedrückt. Man setzt nun fest, dass das Anfangssystem $x_a(0)$ der Gleichung

$$(62.) \qquad \mathfrak{R}(0) = A$$

genüge, und dass die Verhältnisse der Anfangselemente $\frac{x'_\mathfrak{c}(0)}{x'_{\mathfrak{c}_1}(0)}$ durch die $(n-1)$ Gleichungen

$$(63.) \qquad \frac{\left(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x_\mathfrak{c}}\right)_0}{\left(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x_{\mathfrak{c}_1}}\right)_0} = \frac{\frac{\partial F_0(x'(0))}{\partial x'_\mathfrak{c}(0)}}{\frac{\partial F_0(x'(0))}{\partial x'_{\mathfrak{c}_1}(0)}}$$

bestimmt werden. Das Fortschreiten der Variabelen x_a in der Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, welche durch die Integration des Systems (3^b.) bezeichnet ist, geschehe so, dass das Differential $\left(\frac{d\mathfrak{R}}{dt}\right)_0 dt$ positiv wird. Aus den n Gleichungen (62.) und (63.) determinirt man die Grössen $x_a(0)$ als Functionen der Grössen x_a und substituirt diese Ausdrücke in die Function R, welche dadurch in die Function $\overline{R}$ übergehen möge. Dann wird das gesuchte Integral P durch die Gleichung

$$(64.)\qquad P = \overline{R} + A$$

dargestellt.

Das vollständige Differential der Grösse R, insofern dieselbe von den Werthsystemen x_a und $x_a(0)$ abhängt, ist durch die Gleichung (7^b.) folgendermassen ausgedrückt

$$\delta R = \sum_a \frac{\partial (F(x'))^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a} \delta x_a - \sum_a \frac{\partial (F_0(x'(0)))^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a(0)} \delta x_a(0).$$

Die Werthsysteme $x_a(0)$ werden nun durch Functionen der Variabelen x_a ersetzt, welche die Gleichungen (62.) und (63.) erfüllen. In Folge von (63.) ist der Ausdruck $\sum_a \frac{\partial (F_0(x'(0)))^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a(0)} \delta x_a(0)$ gleich dem Producte eines Factors in den Ausdruck $\sum_a \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_a}\right)_0 \delta x_a(0)$, in Folge von (62.) ist der Ausdruck $\sum_a \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_a}\right)_0 \delta x_a(0)$ gleich Null. Deshalb gilt für das vollständige Differential der Function $\overline{R}$ die Gleichung

$$(65.)\qquad \delta \overline{R} = \sum_a \frac{\partial (F(x'))^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a} \delta x_a,$$

welche beweist, dass die Function $P = \overline{R} + A$, wie behauptet worden, ein Integral der Forderung (40.) ist. Da die Function $\overline{R}$ verschwindet, sobald die Gleichungen $x_a = x_a(0)$ eintreten, und da die Systeme $x_a(0)$ die Gleichung (62.) befriedigen, so bezeichnet die Gleichung $P = A$ dieselbe Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung für die Variabelen x_a, wie die Gleichung $\mathfrak{R} = A$, und zwar gelten für dieselben dieser Mannigfaltigkeit benachbarten Werthcomplexe x_a die Ungleichheiten $P > A$ und $\mathfrak{R} > A$, weil das Differential $\left(\frac{d\mathfrak{R}}{dt}\right)_0 dt$ positiv vorausgesetzt ist.

Führt man die Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung, welche durch die Integration des Systems (3^b.) bestimmt sind, von den Systemen $x_a(0)$ so weit, dass für alle Endsysteme x_a die Function R denselben Werth

$$(66.)\qquad R = B - A$$

erhält, so gehören alle Endsysteme x_a wegen der Gleichung (64.) zu der Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung

$$(67.)\qquad P = B.$$

Ferner haben die Verhältnisse der Elemente $\frac{x'_\mathfrak{c}}{x'_{\mathfrak{c}_1}}$, welche dieser Mannigfaltigkeit entsprechen, die Eigenschaft, die Gleichungen (54*.) oder die aequivalenten Gleichungen

$$(68.)\qquad \frac{\frac{\partial P}{\partial x_\mathfrak{c}}}{\frac{\partial P}{\partial x_{\mathfrak{c}_1}}} = \frac{\frac{\partial F(x')}{\partial x'_\mathfrak{c}}}{\frac{\partial F(x')}{\partial x'_{\mathfrak{c}_1}}}$$

zu erfüllen.

Die Bestimmung der Verhältnisse der Elemente $\frac{x'_\mathfrak{c}(0)}{x'_{\mathfrak{c}_1}(0)}$ durch (63.) und der Elemente $\frac{x'_\mathfrak{c}}{x'_{\mathfrak{c}_1}}$ durch (68.) kann durch eine Forderung ersetzt werden, die sich auf das Element des Integrals R oder den Ausdruck $(F(dx))^{\frac{1}{p}}$ bezieht. Betrachtet man in demselben die Grössen $x_\mathfrak{a}$ als fest und der Gleichung $\mathfrak{R}=A$ genügend, dagegen die Grössen $dx_\mathfrak{a}$ als veränderlich, und verlangt, dass die vollständige Ableitung von $(F(dx))^{\frac{1}{p}}$ in Betreff der Grössen $dx_\mathfrak{a}$ verschwinde, während der Ausdruck

$$(69.)\qquad d\mathfrak{R} = \sum_\mathfrak{a} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_\mathfrak{a}} dx_\mathfrak{a}$$

einen festen positiven Werth annimmt, so sind die Verhältnisse der Grössen $dx_\mathfrak{a}$ durch die Gleichungen

$$(70.)\qquad \frac{\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_\mathfrak{c}}}{\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_{\mathfrak{c}_1}}} = \frac{\frac{\partial F(dx)}{\partial\, dx_\mathfrak{c}}}{\frac{\partial F(dx)}{\partial\, dx_{\mathfrak{c}_1}}}$$

determinirt, und das noch frei bleibende Vorzeichen der *einen* Grösse $dx_{\mathfrak{c}_1}$ ist durch die Bedingung $d\mathfrak{R} > 0$ festgestellt. Dann bezeichnen die Elemente $dx_\mathfrak{a}$ den Anfang einer bestimmten Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, welche von dem Werthsysteme $x_\mathfrak{a}$ der Mannigfaltigkeit $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\mathfrak{R}=A$ ausgeht. Für dieses Sachverhältniss kann man den Ausdruck gebrauchen, *dass die Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung $dx_\mathfrak{a}$ gegen die Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung $\mathfrak{R}=A$ mit Rücksicht auf die Form $F(dx)$ normal sei.* Unter den so definirten Begriff fügt sich das System (63.) und das System (68.). Bei diesen Anwendungen ist zu beachten, dass die Form $F(dx)$ bei nicht constantem U vermöge (9.) das Product des Factors $\left(\frac{p(U+H)}{p-1}\right)^{p-1}$ in die Form $pf(dx)$ ist, dass dieser Factor sich in den Verhältnissen der Ableitungen $\dfrac{\dfrac{\partial F(dx)}{\partial dx_\iota}}{\dfrac{\partial F(dx)}{\partial dx_{\iota_1}}}$ heraushebt, und dass man deshalb auch zu der Bezeichnung berechtigt ist, dass die Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung $(dx_a)_0$ normal sei gegen die Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung $\mathfrak{R}(0) = A$, und die Mannigfaltigkeit dx_a gegen die Mannigfaltigkeit $P = B$, *mit Rücksicht auf die Form* $pf(dx)$.

Wenn man innerhalb der Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung $\mathfrak{R} = A$ von dem Werthsysteme x_a nach dem Werthsysteme $x_a + \delta x_a$ fortschreitet, oder, was dasselbe ist, eine Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung durchläuft, so ist

$$(71.)\qquad \delta\mathfrak{R} = \sum_a \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_a}\delta x_a = 0,$$

und zwischen den Elementen δx_a dieser Mannigfaltigkeit und den Elementen dx_a der gegen $\mathfrak{R} = A$ normalen Mannigfaltigkeit besteht die Gleichung

$$(72.)\qquad \sum_a \frac{\partial F(dx)}{\partial dx_a}\delta x_a = 0.$$

Dieselbe verwandelt sich, wenn durch die Substitution eines beliebigen Systems neuer Variabelen nach (23.) $F(dx) = G(dy)$ wird, in die correspondirende Gleichung $\sum_a \frac{\partial G(dy)}{\partial dy_a}\delta y_a = 0$, und ist in sofern zu der Form $F(dx)$ *covariant*. Nun gilt, wenn die Form $F(dx)$ vom zweiten Grade ist, und nur, wenn sie vom zweiten Grade ist, die Gleichung

$$(73.)\qquad \sum_a \frac{\partial F(dx)}{\partial dx_a}\delta x_a = \sum_a \frac{\partial F(\delta x)}{\partial \delta x_a}dx_a.$$

Also ist in diesem Falle, und nur in diesem Falle, die Beziehung zwischen der Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung dx_a und der Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung δx_a eine gegenseitige, und man darf sagen, *dass die eine gegen die andere mit Rücksicht auf die Form* $F(dx)$ *normal, oder orthogonal, ist.*

9.

Unter der Voraussetzung, dass die Zahl $p = 2$ ist, sei P ein vollständiges Integral der Forderung (40.) mit den Constanten $c_1, c_2, \dots c_n$, und man transformire die Form $F(dx)$ durch das in (42.) definirte System von neuen Variabelen

$$P,\quad \frac{\partial P}{\partial c_2} = \Phi_2,\quad \frac{\partial P}{\partial c_3} = \Phi_3,\quad \dots\quad \frac{\partial P}{\partial c_n} = \Phi_n.$$

Hier ist nach (9.) und (17.) für ein nicht constantes U

$$F(dx) = 2(U+H)\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, dx_{\mathfrak{a}}\, dx_{\mathfrak{b}},$$

während für ein constantes U die Substitution (10**.)

$$2(U+H) = 2(U_0+H) = 1$$

gemacht werden muss. Die neue Form ist in Folge der Artikel 4. und 5. das Aggregat aus dP^2 und einer anderen Form, welche nur die Differentiale $d\Phi_2, \dots d\Phi_n$ enthält, und es gilt die Gleichung

$$(74.)\qquad 2(U+H)\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, dx_{\mathfrak{a}}\, dx_{\mathfrak{b}} = dP^2 + \sum_{\mathfrak{r},\mathfrak{s}} m_{\mathfrak{r},\mathfrak{s}}\, d\Phi_{\mathfrak{r}}\, d\Phi_{\mathfrak{s}},$$

wo die Buchstaben $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ die Zahlenreihe $2, 3, \dots n$ bezeichnen. Um die adjungirten Elemente der neuen Form durch die adjungirten Elemente der ursprünglichen Form darzustellen, wie in Artikel 2. für den Fall $n = 2$ geschehen ist, setze ich

$$(75.)\qquad |m_{\mathfrak{r},\mathfrak{s}}| = M, \qquad \frac{\partial M}{\partial m_{\mathfrak{r},\mathfrak{s}}} = M_{\mathfrak{r},\mathfrak{s}};$$

ferner ist zu erwägen, dass dem nach (17.) der Form $2f(dx)$ zugehörigen Ausdrucke $\frac{A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\Delta}$ bei der Form $F(dx)$ der Ausdruck $\frac{A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{2(U+H)\Delta}$ entspricht. Demnach ergeben sich die Transformationsrelationen

$$(76.)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2(U+H)}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \dfrac{A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\Delta}\dfrac{\partial P}{\partial x_{\mathfrak{a}}}\dfrac{\partial P}{\partial x_{\mathfrak{b}}} = 1, \\ \dfrac{1}{2(U+H)}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \dfrac{A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\Delta}\dfrac{\partial P}{\partial x_{\mathfrak{a}}}\dfrac{\partial \Phi_{\mathfrak{r}}}{\partial x_{\mathfrak{b}}} = 0, \\ \dfrac{1}{2(U+H)}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \dfrac{A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\Delta}\dfrac{\partial \Phi_{\mathfrak{r}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}}\dfrac{\partial \Phi_{\mathfrak{s}}}{\partial x_{\mathfrak{b}}} = \dfrac{M_{\mathfrak{r},\mathfrak{s}}}{M}, \end{cases}$$

von denen die erste mit der *Hamilton*schen partiellen Differentialgleichung (18.) für die Function P und daher auch mit dem Inhalt der Forderung (40.) zusammenfällt. Die linke Seite derselben hat die Eigenschaft, bei der Transformation (23.) in den entsprechend gebildeten Ausdruck für die Form $G(dy)$ überzugehen, und ist, nach der Bezeichnung Herrn *Beltramis*, *der erste Differentialparameter der Function P mit Bezug auf die quadratische Form $F(dx)$;* die Gleichung selbst, welche man als *die der quadratischen Form $F(dx)$ zugehörige Hamiltonsche partielle Differentialgleichung* bezeichnen kann, wird die Gleichung (12.) des dortigen §. 3, sobald $F(dx)$ das Quadrat des Linearelements für die $n$fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der Variabelen $x_{\mathfrak{a}}$ bedeutet.

Indem ich die Voraussetzung $p = 2$ beibehalte, werde ich die Erörterungen des vorigen Artikels auf die Begriffe der reellen Mechanik beziehen, die in Art. 2 definirt sind. So entstehen die folgenden Theoreme *).

Theorem III. *Wenn ein vollständiges Integral P der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung* (18.) *mit den Constanten* $c_1, c_2, \dots c_n$ *gegeben ist, wenn man für die Anfangswerthe der Variabelen* $x_a(0)$ *durch die Gleichung* $P(0) = A = \text{const.}$ *eine Mannigfaltigkeit der* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Ordnung bestimmt, und für die Variabelen* x_a *von jedem Werthsysteme* $x_a(0)$ *eine Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung ausgehen lässt, welche das System der mechanischen Differentialgleichungen* (3^b.) *integrirt, und gegen die Mannigfaltigkeit* $P(0) = A$ *mit Rücksicht auf die Form* $2f(dx)$ *normal ist, so wird die Gesammtheit dieser Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung durch die* $(n-1)$ *Integrale* $\frac{\partial P}{\partial c_\tau} = \left(\frac{\partial P}{\partial c_\tau}\right)_0$ *in Verbindung mit der Gleichung* $P(0) = A$ *ausgedrückt. Setzt man diese Mannigfaltigkeiten in dem Sinne, in dem die Function* P *zunimmt, so weit fort, dass die Endsysteme* x_a *zu der Mannigfaltigkeit der* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Ordnung* $P = B = \text{const.}$ *gehören, so sind die bezeichneten Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung gegen die Mannigfaltigkeit* $P = B$ *mit Rücksicht auf die Form* $2f(dx)$ *ebenfalls normal, und das Integral der kleinsten Wirkung nimmt für alle den festen Werth* $R = B - A$ *an.*

Theorem IV. *Die Gleichung* $\mathfrak{R}(0) = A = \text{const.}$ *bezeichne für die Anfangswerthe* $x_a(0)$ *eine beliebig gegebene Mannigfaltigkeit der* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Ordnung, von jedem Werthsysteme* $x_a(0)$ *erstrecke sich für die Variabelen* x_a, *in dem Sinne, in welchem* $\mathfrak{R} > A$ *wird, eine Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, welche das System der mechanischen Differentialgleichungen* (3^b.) *integrirt, und gegen die Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{R}(0) = A$ *mit Rücksicht auf die Form* $2f(dx)$ *normal ist, und zwar soweit, dass das Integral der kleinsten Wirkung* R *in allen den festen Werth* $B - A$ *erhält. Dann bilden die Endsysteme* x_a *eine Mannigfaltigkeit der* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Ordnung, gegen welche die definirten Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung mit Rücksicht auf die Form* $2f(dx)$ *normal sind, und der Ausdruck* $R + A$ *geht durch eine geeignete Substitution in ein Integral* P *der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung* (18.) *über, das, gleich* A *gesetzt, die Mannigfaltigkeit der Anfangswerthe* $x_a(0)$, *gleich* B *gesetzt, die Mannigfaltigkeit der Endwerthe* x_a *darstellt.*

*) Das zweite von diesen Theoremen habe ich unter der Benennung: *Theorem der analytischen Mechanik* in der allgemeinen Sitzung der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde vom 7. August 1871 vorgetragen und in den Berichten der Gesellschaft publicirt.

Es leuchtet ein, dass, wenn die Zahl $n=2$ oder $=3$ ist, und wenn $2f(dx)$ in dem Sinne der reellen Geometrie das Quadrat des Linearelements auf einer gegebenen Oberfläche oder in dem Raume bedeutet, eine Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, die gegen eine Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung mit Rücksicht auf die Form $2f(dx)$ normal ist, zu einer Linie wird, die beziehungsweise gegen eine andere Linie in der gegebenen Oberfläche, oder gegen eine Fläche im Raume normal steht. Mithin verwandelt sich das Theorem IV., wenn $n=2$ und die Kräftefunction U gleich Null ist, in den *Gauss*ischen Satz über die kürzesten Linien auf einer gegebenen Oberfläche, welcher in der Einleitung angeführt ist *).

Da der Begriff einer Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung für die Variabelen $x_\mathfrak{a}$, die das System der mechanischen Differentialgleichungen $(3^b.)$ integrirt, nichts anderes bedeutet, als die Art der Abhängigkeit, in welche $(n-1)$ Variabele $x_\mathfrak{c}$ gegen die übrig bleibende Variabele $x_{\mathfrak{c}_1}$ treten, sobald die Bewegung des betreffenden Massensystems den gegebenen Anfangszuständen gemäss erfolgt, so nimmt *die durch die Theoreme III. und IV. bezeichnete Gruppirung dieser Anfangszustände* die Aufmerksamkeit in Anspruch. Hier zeigt sich wieder ein bedeutender Unterschied, je nachdem die Kräftefunction in der That vorhanden oder nicht vorhanden ist. Wenn die Kräftefunction nicht vorhanden, d. h. U constant oder Null ist, so bleibt die Integration des Systems Differentialgleichungen $(3^b.)$ völlig ungeändert, wofern man die Anfangswerthe $x_\mathfrak{a}(0)$ nicht ändert, die Anfangswerthe $x'_\mathfrak{a}(0)$ aber so ändert, dass die Verhältnisse $\frac{x'_\mathfrak{c}(0)}{x'_{\mathfrak{c}_1}(0)}$ dieselben bleiben, und dasselbe gilt von dem Integral der kleinsten Wirkung $R=\int_{t_0}^{t}(2f(x'))^{\frac{1}{2}}\,dt$. Wenn dagegen eine Kräftefunction vorhanden, d. h. U nicht constant ist, so bestimmen die absoluten Werthe der Grössen $x'_\mathfrak{a}(0)$ den Werth der Constante H in dem Integral der lebendigen Kraft $(5^a.)$, und diese Constante erscheint sowohl in dem System Differentialgleichungen $(3^b.)$, als auch in dem Integral der kleinsten Wirkung $R=\int_{t_0}^{t}2(U+H)^{\frac{1}{2}}(f(x'))^{\frac{1}{2}}\,dt$. Die Gruppirung der Anfangszustände in den Theoremen III. und IV. beschränkt die Werthe $x_\mathfrak{a}(0)$ durch eine Gleichung, bestimmt zu jedem Werthsysteme $x_\mathfrak{a}(0)$ die Verhältnisse $\frac{x'_\mathfrak{c}(0)}{x'_{\mathfrak{c}_1}(0)}$ und

*) Disqu. gen. circa superf. curv., art. 16.

setzt, wofern U nicht constant ist, zugleich voraus, dass die Grösse H einen unveränderlichen Werth habe. Diese Gruppirung verfügt also, wenn U constant oder Null ist, *nur* über die Verhältnisse $\frac{x'_{\mathfrak{c}}(0)}{x'_{\mathfrak{c}_1}(0)}$ und *nicht* über den absoluten Werth der Grössen $x'_{\mathfrak{a}}(0)$; sie verfügt aber, wenn U nicht constant ist, über den absoluten Werth der Grössen $x'_{\mathfrak{a}}(0)$ in der Weise, dass die Constante H stets denselben Werth haben muss, oder, dass der Uebergang des betreffenden Massensystems aus einem beliebigen von jenen Anfangszuständen in einen anderen beliebigen von denselben durch eine fingirte unter der Einwirkung der Kräftefunction U geschehende Bewegung dem Satze von der lebendigen Kraft (5^a.) nicht widerspricht.

Bonn, den 15. Juli 1871.

Druckfehler.

Seite 141, Ueberschrift des Artikels, statt 5 setze man 8.